Sujet 3 · énoncé

Mathématiques générales **Sujet 3** · difficile Durée : **1 h** Barème : **20 points**

> Durée : 1 heure. Sans calculatrice ni document. Toute réponse est justifiée ; les ensembles de solutions sont donnés sous forme d'intervalles ou de listes. Les quatre exercices sont indépendants et de poids égal.

Exercice 1 — 5 points

Calcul algébrique

1. On pose $u = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $v = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ et $a = u + v$. Calculer uv et $u^3 + v^3$, montrer que $a^3 + 3a - 4 = 0$, puis en déduire la valeur de a.

2. Soient a et b deux réels tels que $a \neq b$ et $a \neq -b$. Simplifier $F = \dfrac{a^3 - b^3}{a - b} - \dfrac{(a+b)^3 - a^3 - b^3}{a+b}$.

3. Soit n un entier naturel. Justifier que $(-1)^{n^2} = (-1)^n$, puis simplifier, suivant la parité de n, l'expression $N = \dfrac{(-1)^{n^2} \cdot 2^{2n+3} - (-2)^{2n+1}}{(-4)^n \cdot (-1)^n}$.

Exercice 2 — 5 points

Valeurs absolues, racines, logarithmes

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|x^2 - 4x + 3| = x - 1$;

2. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} \geqslant 1$;

3. $\ln x \geqslant |\ln x - 1|$.

Exercice 3 — 5 points

Exponentielles et paramètre

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7 \cdot 4^{x-1}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{e^x - 2}{e^x - 4} \leqslant 1$.

3. Soit m un réel. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions réelles de l'équation $\ln(x) + \ln(4 - x) = \ln(m)$, et les donner lorsqu'il y en a.

Exercice 4 5 points *Fonctions*

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Montrer que f est impaire. Montrer que pour tout réel y, $y = f(x) \iff e^x = y + \sqrt{y^2+1}$. En déduire que f est bijective et donner une expression de f^{-1}.

2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 - 2|x|$. Déterminer $g([-1,3])$ et $g^{-1}([-1,0])$.

3. Proposer deux intervalles I et J, les plus grands possibles, tels que $3 \in I$ et tels que la fonction $\widetilde{g} : \begin{cases} I \longrightarrow J \\ x \longmapsto x^2 - 2|x| \end{cases}$ soit bijective. Donner une expression de $\widetilde{g}^{-1}$.

— fin —