Sujet 2 · énoncé

Mathématiques générales **Sujet 2** · moyen Durée : **1 h** Barème : **20 points**

> Durée : 1 heure. Sans calculatrice ni document. Toute réponse est justifiée ; les ensembles de solutions sont donnés sous forme d'intervalles ou de listes. Les quatre exercices sont indépendants et de poids égal.

Exercice 1 — 5 points

Calcul algébrique

1. On pose $F(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$. Déterminer l'ensemble de définition de F, puis simplifier $F(x)$.

2. Soit n un entier naturel. Simplifier $N = \dfrac{4^{n+1} - 2^{2n-1}}{2^{2n+1} + 4^n}$.

3. Calculer $(1+\sqrt{2})^3$ et $(\sqrt{2}-1)^3$. En déduire la valeur de $C = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.

Exercice 2 — 5 points

Équations et inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{x^2 - 3} \geqslant x - 1$;

2. $|x^2 - 2x| < x + 4$;

3. $|x - 1| + |2x + 1| = 4$.

Exercice 3 — 5 points

Logarithmes et exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 \leqslant 0$;

2. $\dfrac{\ln x}{\ln x - 1} \geqslant 2$;

3. $e^x + 4e^{-x} = 5$.

Exercice 4 5 points *Fonctions*

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}\right)$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, puis étudier sa parité.

2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. Donner, sans le symbole $\lfloor \cdot \rfloor$, l'expression de $g(x)$ sur $[0,1[$. Montrer que g est périodique de période 1 et tracer sa représentation graphique sur $[-1,2]$.

3. Soit $h : \begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[\\ x \longmapsto e^{2x} - 2e^x + 2 \end{cases}$. Montrer que h est bijective et donner une expression de h^{-1}.

— fin —