Sujet 1 · énoncé

Mathématiques générales **Sujet 1** · facile Durée : **1 h** Barème : **20 points**

> Durée : 1 heure. Sans calculatrice ni document. Toute réponse est justifiée ; les ensembles de solutions sont donnés sous forme d'intervalles ou de listes. Les quatre exercices sont indépendants et de poids égal.

Exercice 1 — 5 points

Puissances et radicaux

1. Soit n un entier naturel. Simplifier $A = \dfrac{2^{n+2}\cdot 9^{n} - 18^{n}}{6^{n}\cdot 3^{n}}$.

2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}} = \dfrac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2}$, puis en déduire la valeur de

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{49}+\sqrt{47}}.$$

3. Soit $a \geqslant 8$. Simplifier $B = \sqrt{a + 4\sqrt{a-4}} - \sqrt{a - 4\sqrt{a-4}}$.

Exercice 2 — 5 points

Valeurs absolues et racines carrées

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|x^2 - 4| = 3x$;

2. $\sqrt{2x+5} = x + 1$;

3. $|x-1| + |x+2| \leqslant 5$.

Exercice 3 — 5 points

Logarithmes et exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x+3) + \ln(x) = \ln(2x+6)$;

2. $4^{x} - 3\cdot 2^{x+1} + 8 = 0$;

3. $(\ln x)^2 - \ln x - 2 \leqslant 0$.

Exercice 4 5 points *Fonctions*

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique, puis déterminer $f([0,3])$ et $f^{-1}(\{1\})$.

2. La fonction f est-elle injective ? surjective ? Justifier.

3. Proposer deux intervalles I et J, les plus grands possibles, tels que $5 \in I$ et tels que la fonction $g : \begin{cases} I \longrightarrow J \\ x \longmapsto x^2 - 4x + 1 \end{cases}$ soit bijective. Donner une expression de g^{-1}.

— fin —