Sujet 3 · corrigé

Mathématiques générales **Sujet 3** · difficile Durée : **1 h** Barème : **20 points**

> Chaque question est traitée étape par étape, avec le domaine d'abord et la réponse encadrée à la fin. À ouvrir après l'heure d'épreuve.

Exercice 1

Calcul algébrique

1. $uv = \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \sqrt[3]{4-5} = \sqrt[3]{-1} = -1$.

$u^3 + v^3 = (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) = 4$.

On développe :

$$a^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 4 + 3\cdot(-1)\cdot a = 4 - 3a,$$

d'où $a^3 + 3a - 4 = 0$.

1 est racine évidente de $a^3 + 3a - 4$; on factorise : $a^3 + 3a - 4 = (a-1)(a^2+a+4)$ (on vérifie en développant).

$a^2 + a + 4$ a pour discriminant $1 - 16 = -15 < 0$, donc ne s'annule jamais. La seule racine réelle est $a = 1$.

> **Réponse.** $uv = -1$, $u^3 + v^3 = 4$ et $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$.

2. Premier quotient : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, donc $\dfrac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$.

Second quotient : $(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a+b)$, donc $\dfrac{(a+b)^3 - a^3 - b^3}{a+b} = 3ab$.

$F = a^2 + ab + b^2 - 3ab = a^2 - 2ab + b^2$.

> **Réponse.** $F = (a-b)^2$.

3. $n^2 - n = n(n-1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, dont l'un est pair : $n^2 - n$ est pair, donc n^2 et n ont la même parité et $(-1)^{n^2} = (-1)^n$.

Numérateur : $2^{2n+3} = 8\cdot 4^n$ et $(-2)^{2n+1} = -2^{2n+1} = -2\cdot 4^n$ (exposant impair). Donc il vaut

$$(-1)^n \cdot 8 \cdot 4^n + 2\cdot 4^n = 4^n\big(8(-1)^n + 2\big).$$

Dénominateur : $(-4)^n \cdot (-1)^n = (-1)^n 4^n (-1)^n = (-1)^{2n} 4^n = 4^n$.

Après simplification par 4^n : $N = 8(-1)^n + 2$.

> **Réponse.** $N = 10$ si n est pair, $N = -6$ si n est impair.

Exercice 2

Valeurs absolues, racines, logarithmes

1. Une valeur absolue est positive : il faut $x - 1 \geqslant 0$, soit $x \geqslant 1$.

On factorise : $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, donc $|x^2 - 4x + 3| = |x-1| \cdot |x-3| = (x-1)|x-3|$ puisque $x \geqslant 1$.

L'équation devient $(x-1)|x-3| = (x-1)$, soit $(x-1)\big(|x-3| - 1\big) = 0$.

Donc $x = 1$, ou $|x-3| = 1$, c'est-à-dire $x - 3 = \pm 1$, $x = 2$ ou $x = 4$. Les trois sont $\geqslant 1$.

Vérification : $|1 - 4 + 3| = 0 = 1 - 1$; $|4 - 8 + 3| = 1 = 2 - 1$; $|16 - 16 + 3| = 3 = 4 - 1$.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = \{1, 2, 4\}$.

2. Domaine : $x + 3 \geqslant 0$ et $x - 2 \geqslant 0$, donc $x \geqslant 2$.

On isole une racine pour avoir deux membres positifs : $\sqrt{x+3} \geqslant 1 + \sqrt{x-2}$.

On élève au carré (équivalence car les deux membres sont positifs) : $x + 3 \geqslant 1 + 2\sqrt{x-2} + (x-2)$, soit $4 \geqslant 2\sqrt{x-2}$, soit $\sqrt{x-2} \leqslant 2$.

Encore une fois au carré (membres positifs) : $x - 2 \leqslant 4$, soit $x \leqslant 6$.

Contrôle : en $x = 6$, $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$; en $x = 2$, $\sqrt{5} - 0 \approx 2{,}24 \geqslant 1$.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = [2, 6]$.

3. Domaine : $x > 0$. On pose $X = \ln x$: l'inéquation s'écrit $X \geqslant |X - 1|$.

Le membre de droite est positif, donc il faut $X \geqslant 0$. Pour deux nombres positifs, comparer revient à comparer les carrés :

$X^2 \geqslant (X-1)^2 \iff X^2 \geqslant X^2 - 2X + 1 \iff 2X \geqslant 1 \iff X \geqslant \frac{1}{2}$ (ce qui entraîne $X \geqslant 0$).

Donc $\ln x \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant e^{1/2} = \sqrt{e}$.

Autre chemin : si $X \geqslant 1$, l'inéquation $X \geqslant X - 1$ est toujours vraie ; si $X < 1$, elle s'écrit $X \geqslant 1 - X$, soit $X \geqslant \frac{1}{2}$. Au total $X \geqslant \frac{1}{2}$.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = [\sqrt{e}, +\infty[$.

Exercice 3

Exponentielles et paramètre

1. Membre de gauche : $2^x + 2\cdot 2^x + 4\cdot 2^x = 7\cdot 2^x$.

Membre de droite : $7\cdot 4^{x-1} = \dfrac{7}{4}\cdot 4^x = \dfrac{7}{4}(2^x)^2$.

On pose $X = 2^x > 0$: $7X = \frac{7}{4}X^2$. On divise par $7X > 0$: $1 = \frac{1}{4}X$, soit $X = 4$.

$2^x = 4 \iff x = 2$. Vérification : $4 + 8 + 16 = 28$ et $7\cdot 4 = 28$.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = \{2\}$.

2. Domaine : $e^x \neq 4$, soit $x \neq \ln 4$.

On pose $X = e^x$ et on met tout du même côté (on ne multiplie pas par $X-4$, de signe inconnu) :

$$\frac{X-2}{X-4} - 1 = \frac{X-2-(X-4)}{X-4} = \frac{2}{X-4} \leqslant 0.$$

Le numérateur est positif, donc il faut $X - 4 < 0$, soit $e^x < 4$, soit $x < \ln 4 = 2\ln 2$.

> **Réponse.** $\mathcal{S} =]-\infty, 2\ln 2[$.

3. Sens de l'équation : il faut $x > 0$, $4 - x > 0$ et $m > 0$. Donc $0 < x < 4$ et $m > 0$; si $m \leqslant 0$, $\ln(m)$ n'existe pas et il n'y a aucune solution.

Pour $m > 0$ et $0 < x < 4$: $\ln\big(x(4-x)\big) = \ln m \iff x(4-x) = m \iff x^2 - 4x + m = 0$.

Discriminant : $\Delta = 16 - 4m$.

Si $m > 4$: $\Delta < 0$, aucune solution.

Si $m = 4$: $\Delta = 0$, une solution double $x = 2$, qui est bien dans $]0,4[$.

Si $0 < m < 4$: deux solutions $x = 2 \pm \sqrt{4-m}$. Comme $0 < \sqrt{4-m} < 2$, elles sont toutes deux dans $]0,4[$, donc acceptées.

> **Réponse.** $m \leqslant 0$ ou $m > 4$: aucune solution ; $m = 4$: une solution, $x = 2$; $0 < m < 4$: deux solutions, $x = 2 - \sqrt{4-m}$ et $x = 2 + \sqrt{4-m}$.

Exercice 4

Fonctions

1. Parité :

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -f(x),$$

donc f est impaire.

Équivalence : on pose $X = e^{x} > 0$, donc $e^{-x} = \frac{1}{X}$. En multipliant par $X > 0$:

$$y = f(x) \iff X - \frac{1}{X} = 2y \iff X^2 - 2yX - 1 = 0.$$

Ce trinôme en X a pour discriminant $4y^2 + 4 > 0$ et pour racines $X = y \pm \sqrt{y^2+1}$.

Comme $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y| \geqslant y$, la racine $y - \sqrt{y^2+1}$ est strictement négative : impossible pour $X = e^{x}$. Il reste $X = y + \sqrt{y^2+1}$, qui est bien > 0.

Donc $y = f(x) \iff e^{x} = y + \sqrt{y^2+1}$.

Bijectivité : pour chaque réel y, cette équation a exactement une solution $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$. Tout réel a donc un unique antécédent.

> **Réponse.** f est impaire, bijective, et $f^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

2. Forme utile : $g(x) = |x|^2 - 2|x| = (|x| - 1)^2 - 1$. La valeur de g ne dépend que de $t = |x|$.

Image de $[-1, 3]$: quand x parcourt $[-1, 3]$, $t = |x|$ parcourt $[0, 3]$. La fonction $t \mapsto (t-1)^2 - 1$ décroît de 0 (en $t = 0$) à -1 (en $t = 1$) puis croît jusqu'à 3 (en $t = 3$). Donc $g([-1, 3]) = [-1, 3]$.

Image réciproque de $[-1, 0]$:

$$\begin{aligned} g(x) \in [-1, 0] &\iff -1 \leqslant (|x| - 1)^2 - 1 \leqslant 0 \iff 0 \leqslant (|x| - 1)^2 \leqslant 1 \\ &\iff -1 \leqslant |x| - 1 \leqslant 1 \iff 0 \leqslant |x| \leqslant 2. \end{aligned}$$

> **Réponse.** $g([-1, 3]) = [-1, 3]$ et $g^{-1}([-1, 0]) = [-2, 2]$.

3. Pour $x \geqslant 0$, $g(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$: décroissante sur $[0, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$.

Le plus grand intervalle contenant 3 sur lequel g est strictement monotone (donc injective) est $I = [1, +\infty[$; on ne peut pas descendre sous 1 sans perdre l'injectivité, par exemple $g(0) = g(2) = 0$.

Sur I, g prend toutes les valeurs de $g(1) = -1$ à $+\infty$: $J = [-1, +\infty[$.

Réciproque : pour $y \geqslant -1$ et $x \geqslant 1$,

$$y = (x-1)^2 - 1 \iff (x-1)^2 = y+1 \iff x-1 = \sqrt{y+1} \iff x = 1+\sqrt{y+1}.$$

Réponse. $I = [1, +\infty[$, $J = [-1, +\infty[$ et $\widetilde{g}^{-1}(y) = 1+\sqrt{y+1}$.