# Sujet 2 · corrigé

Mathématiques générales **Sujet 2** · moyen Durée : **1 h** Barème : **20 points**

> Chaque question est traitée étape par étape, avec le domaine d'abord et la réponse encadrée à la fin. À ouvrir après l'heure d'épreuve.

## Exercice 1 *Calcul algébrique*

**1.** On factorise par groupement. Numérateur :

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2).$$

Dénominateur :

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1).$$

$F$ est définie quand le dénominateur est non nul : $\mathcal{D}_F = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$.

Sur $\mathcal{D}_F$, on simplifie par $(x-1)(x-2)$, non nul :

> **Réponse.** $\mathcal{D}_F = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ et $F(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

**2.** $4^{n+1} = 2^{2n+2} = 4 \cdot 2^{2n}$ et $2^{2n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2n}$, donc le numérateur vaut $2^{2n}\left(4 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot 2^{2n}$.

$2^{2n+1} = 2 \cdot 2^{2n}$ et $4^n = 2^{2n}$, donc le dénominateur vaut $2^{2n}(2+1) = 3 \cdot 2^{2n}$.

Le facteur $2^{2n}$ se simplifie.

> **Réponse.** $N = \dfrac{7}{6}$, quel que soit $n$.

**3.** Avec $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ : $(1+\sqrt{2})^3 = 1 + 3\sqrt{2} + 3 \cdot 2 + 2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}$.

Avec $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ : $(\sqrt{2}-1)^3 = 2\sqrt{2} - 3 \cdot 2 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7$.

La racine cubique d'un réel est l'unique réel dont le cube est ce nombre, donc $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = \sqrt{2} - 1$.

$C = (1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = 2$.

> **Réponse.** $C = 2$.

## Exercice 2



**1.** Domaine : $x^2 - 3 \geqslant 0$, soit $x \leqslant -\sqrt{3}$ ou $x \geqslant \sqrt{3}$.

Le membre de gauche est positif. On discute le signe du membre de droite $x - 1$.

Si $x < 1$ : $x - 1 < 0 \leqslant \sqrt{x^2 - 3}$, l'inégalité est vraie dès qu'elle a un sens. Solutions : $x \leqslant -\sqrt{3}$.

Si $x \geqslant 1$ : les deux membres sont positifs (et on est dans le domaine dès que $x \geqslant \sqrt{3}$). On élève au carré : $x^2 - 3 \geqslant x^2 - 2x + 1 \iff 2x \geqslant 4 \iff x \geqslant 2$. Solutions : $x \geqslant 2$.

Contrôle : pour $x = 1{,}8$, $\sqrt{0{,}24} \approx 0{,}49 < 0{,}8$, pas solution ; pour $x = 2$, $\sqrt{1} = 1 = 2 - 1$, solution.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = ]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [2, +\infty[$.

**2.** Une valeur absolue est positive, donc il faut $x + 4 > 0$. Sous cette condition, $|u| < v \iff -v < u < v$ :

$$|x^2 - 2x| < x + 4 \iff -(x+4) < x^2 - 2x < x + 4.$$

Inégalité de droite : $x^2 - 3x - 4 < 0$, racines $-1$ et $4$, donc $-1 < x < 4$.

Inégalité de gauche : $x^2 - x + 4 > 0$. Discriminant $1 - 16 = -15 < 0$, donc toujours vraie.

L'intersection avec $x > -4$ ne change rien.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = ]-1, 4[$.

**3.** Les valeurs absolues changent d'expression en $x = 1$ et $x = -\frac{1}{2}$. Trois zones.

Si $x \geqslant 1$ : $(x - 1) + (2x + 1) = 3x = 4$, donc $x = \frac{4}{3}$, qui est bien $\geqslant 1$. Convient.

Si $-\frac{1}{2} \leqslant x < 1$ : $(1 - x) + (2x + 1) = x + 2 = 4$, donc $x = 2$, qui n'est pas dans la zone. Ne convient pas.

Si $x < -\frac{1}{2}$ : $(1 - x) + (-2x - 1) = -3x = 4$, donc $x = -\frac{4}{3}$, qui est bien $< -\frac{1}{2}$. Convient.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = \{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\}$.

## Exercice 3

*Logarithmes et exponentielles*

**1.** On pose $X = 3^x > 0$ ; $3^{2x} = X^2$. L'inéquation devient $X^2 - 4X + 3 \leqslant 0$.

$X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$, négatif entre les racines : $1 \leqslant X \leqslant 3$.

$1 \leqslant 3^x \leqslant 3 \iff 3^0 \leqslant 3^x \leqslant 3^1 \iff 0 \leqslant x \leqslant 1$ (la fonction $x \mapsto 3^x$ est croissante).

> **Réponse.** $\mathcal{S} = [0, 1]$.

**2.** Domaine : $x > 0$ et $\ln x \neq 1$, c'est-à-dire $x \neq e$.

On pose $X = \ln x$. On ne multiplie pas par $X - 1$, dont le signe est inconnu ; on met tout du même côté :

$$\frac{X}{X-1} - 2 = \frac{X - 2(X-1)}{X-1} = \frac{2 - X}{X-1} \geqslant 0.$$

Tableau de signes : $2 - X$ est positif pour $X \leqslant 2$, $X - 1$ est positif pour $X > 1$. Le quotient est positif pour $1 < X \leqslant 2$ (et nul en $X = 2$, interdit en $X = 1$).

$1 < \ln x \leqslant 2 \iff e < x \leqslant e^2$.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = ]e, e^2]$.

**3.** On pose $X = e^x > 0$, donc $e^{-x} = \frac{1}{X}$. L'équation s'écrit $X + \frac{4}{X} = 5$.

On multiplie par $X > 0$ : $X^2 - 5X + 4 = 0$, racines $X = 1$ et $X = 4$, toutes deux positives.

$e^x = 1 \iff x = 0$ et $e^x = 4 \iff x = \ln 4 = 2\ln 2$.

Vérification : pour $x = \ln 4$, $4 + \frac{4}{4} = 5$.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = \{0,\ 2\ln 2\}$.

## Exercice 4



**1.** Définition : il faut $\sqrt{x^2+4} - x > 0$. Or $\sqrt{x^2+4} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x$, donc c'est vrai pour tout réel $x$. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à $0$.

Parité : on calcule $f(x) + f(-x)$ en utilisant $\ln u + \ln v = \ln(uv)$ :

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln \frac{(\sqrt{x^2+4} - x)(\sqrt{x^2+4} + x)}{4} \\ &= \ln \frac{(x^2+4) - x^2}{4} = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x$.

> **Réponse.** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

**2.** Sur $[0, \frac{1}{2}[$ : $0 \leqslant 2x < 1$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 0$, et $\lfloor x \rfloor = 0$. Ainsi $g(x) = 0$.

Sur $[\frac{1}{2}, 1[$ : $1 \leqslant 2x < 2$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 1$, et $\lfloor x \rfloor = 0$. Ainsi $g(x) = 1$.

Périodicité : pour tout entier $k$, $\lfloor u + k \rfloor = \lfloor u \rfloor + k$. Donc $g(x+1) = \lfloor 2x+2 \rfloor - 2\lfloor x+1 \rfloor = (\lfloor 2x \rfloor + 2) - 2(\lfloor x \rfloor + 1) = g(x)$.

Graphe sur $[-1, 2]$ : un créneau. $g$ vaut $0$ sur $[-1, -\frac{1}{2}[$, $1$ sur $[-\frac{1}{2}, 0[$, $0$ sur $[0, \frac{1}{2}[$, $1$ sur $[\frac{1}{2}, 1[$, $0$ sur $[1, \frac{3}{2}[$, $1$ sur $[\frac{3}{2}, 2[$, puis $g(2) = 0$. Point plein à gauche de chaque palier, point vide à droite.

> **Réponse.** $g = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}[$, $g = 1$ sur $[\frac{1}{2}, 1[$, période $1$.

**3.** On pose $X = e^x$. Comme $x \geqslant 0$, on a $X \geqslant 1$. Et $h(x) = X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1$.

Soit $y \geqslant 1$. Comme $X - 1 \geqslant 0$, on garde la racine positive :

$$y = (X-1)^2 + 1 \iff (X-1)^2 = y - 1 \iff X - 1 = \sqrt{y-1}.$$

Donc $y = h(x) \iff e^x = 1 + \sqrt{y-1} \iff x = \ln\bigl(1 + \sqrt{y-1}\bigr)$.

Ce réel est bien dans $[0, +\infty[$ car $1 + \sqrt{y-1} \geqslant 1$. Chaque $y \geqslant 1$ a donc exactement un antécédent dans $[0, +\infty[$.

> **Réponse.** $h$ est bijective et $h^{-1}(y) = \ln\bigl(1 + \sqrt{y-1}\bigr)$.