Sujet 1 · corrigé

Mathématiques générales **Sujet 1** · facile Durée : **1 h** Barème : **20 points**

> Chaque question est traitée étape par étape, avec le domaine d'abord et la réponse encadrée à la fin. À ouvrir après l'heure d'épreuve.

Exercice 1 *Puissances et radicaux*

1. On écrit tout avec les facteurs premiers 2 et 3 :

$$2^{n+2}\cdot 9^n = 2^2\cdot 2^n\cdot 3^{2n} = 4\cdot 2^n\cdot 3^{2n} \qquad \text{et} \qquad 18^n = (2\cdot 3^2)^n = 2^n\cdot 3^{2n}.$$

Le numérateur vaut donc

$$4\cdot 2^n\cdot 3^{2n} - 2^n\cdot 3^{2n} = 3\cdot 2^n\cdot 3^{2n}.$$

Le dénominateur vaut

$$6^n\cdot 3^n = 2^n\cdot 3^n\cdot 3^n = 2^n\cdot 3^{2n}.$$

> **Réponse.** $A = 3$, quel que soit n.

2. On multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}$ (non nulle) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}} &= \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})^2-(\sqrt{2k-1})^2}\\ &= \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(2k+1)-(2k-1)} = \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2}.\end{aligned}$$

Le terme $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ correspond à $k=1$ (car $\sqrt{1}=1$), et le dernier $\frac{1}{\sqrt{49}+\sqrt{47}}$ à $k=24$. Donc

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{24}\bigl(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\bigr).$$

La somme est télescopique : chaque $-\sqrt{2k-1}$ annule le $+\sqrt{2k-1}$ du terme précédent. Il reste le premier et le dernier :

$$S = \frac{\sqrt{49}-\sqrt{1}}{2} = \frac{7-1}{2}.$$

> **Réponse.** $S = 3$.

3. Pour $a \geqslant 4$, posons $t = \sqrt{a-4} \geqslant 0$, de sorte que $a = t^2+4$. Alors :

$$a + 4\sqrt{a-4} = t^2+4t+4 = (t+2)^2 \qquad \text{et} \qquad a - 4\sqrt{a-4} = t^2-4t+4 = (t-2)^2.$$

Donc $\sqrt{a+4\sqrt{a-4}} = |t+2| = t+2$ et $\sqrt{a-4\sqrt{a-4}} = |t-2|$ (attention : $\sqrt{u^2} = |u|$, pas u).

Comme $a \geqslant 8$, on a $t = \sqrt{a-4} \geqslant \sqrt{4} = 2$, donc $|t-2| = t-2$.

$B = (t+2) - (t-2) = 4$.

> **Réponse.** $B = 4$ pour tout $a \geqslant 8$. (Pour $4 \leqslant a < 8$ on aurait trouvé $B = 2t = 2\sqrt{a-4}$.)

Exercice 2

Valeurs absolues et racines carrées

1. Une valeur absolue est positive : il faut $3x \geqslant 0$, donc $x \geqslant 0$. Sous cette condition, $|x^2 - 4| = 3x$ équivaut à $x^2 - 4 = 3x$ ou $x^2 - 4 = -3x$.

Premier cas : $x^2 - 3x - 4 = 0$, discriminant $9 + 16 = 25$, racines $x = 4$ et $x = -1$.

Second cas : $x^2 + 3x - 4 = 0$, discriminant 25, racines $x = 1$ et $x = -4$.

On ne garde que les racines positives : 4 et 1. Vérification : $|16 - 4| = 12 = 3 \cdot 4$ et $|1 - 4| = 3 = 3 \cdot 1$.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = \{1, 4\}$.

2. Conditions : $2x + 5 \geqslant 0$ pour la racine, et $x + 1 \geqslant 0$ car une racine carrée est positive. Il faut donc $x \geqslant -1$.

Pour $x \geqslant -1$, les deux membres sont positifs et on peut élever au carré sans perdre l'équivalence : $2x + 5 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, soit $x^2 = 4$, $x = 2$ ou $x = -2$.

$x = -2$ ne respecte pas $x \geqslant -1$ (d'ailleurs $\sqrt{1} = 1 \neq -1$). $x = 2$ convient : $\sqrt{9} = 3 = 2 + 1$.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = \{2\}$.

3. Les valeurs absolues changent d'expression en $x = 1$ et $x = -2$. On découpe $\mathbb{R}$ en trois zones.

Si $x \geqslant 1$: $|x - 1| + |x + 2| = (x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$, et $2x + 1 \leqslant 5 \iff x \leqslant 2$. Solutions : $[1, 2]$.

Si $-2 \leqslant x < 1$: $(1 - x) + (x + 2) = 3$, et $3 \leqslant 5$ est toujours vrai. Solutions : $[-2, 1[$.

Si $x < -2$: $(1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$, et $-2x - 1 \leqslant 5 \iff x \geqslant -3$. Solutions : $[-3, -2[$.

On réunit les trois morceaux.

> **Réponse.** $\mathcal{S} = [-3, 2]$.

Exercice 3

Logarithmes et exponentielles

1. Domaine : il faut $x+3>0$, $x>0$ et $2x+6>0$, donc $x>0$.

On remarque que $2x+6=2(x+3)$, donc $\ln(2x+6)=\ln 2+\ln(x+3)$.

L'équation devient $\ln(x+3)+\ln x=\ln 2+\ln(x+3)$, c'est-à-dire $\ln x=\ln 2$, soit $x=2$ (le logarithme est injectif).

Autre chemin : $\ln\big(x(x+3)\big)=\ln(2x+6)$ donne $x^2+3x=2x+6$, soit $x^2+x-6=0$, racines 2 et -3 ; on écarte -3, hors du domaine.

> **Réponse.** $\mathcal{S}=\{2\}$.

2. On pose $X=2^x$, avec $X>0$. Comme $4^x=(2^x)^2=X^2$ et $2^{x+1}=2X$, l'équation s'écrit $X^2-6X+8=0$.

Discriminant $36-32=4$, racines $X=2$ et $X=4$, toutes deux positives.

$2^x=2 \iff x=1$ et $2^x=4 \iff x=2$.

> **Réponse.** $\mathcal{S}=\{1,2\}$.

3. Domaine : $x>0$. On pose $X=\ln x$: l'inéquation devient $X^2-X-2\leqslant 0$.

$X^2-X-2=(X-2)(X+1)$, négatif entre les racines : $-1\leqslant X\leqslant 2$.

On revient à x ; l'exponentielle est croissante, donc $-1\leqslant \ln x\leqslant 2 \iff e^{-1}\leqslant x\leqslant e^2$.

> **Réponse.** $\mathcal{S}=[e^{-1},e^2]$.

Exercice 4

Fonctions

1. Forme canonique : $f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3$.

Image de $[0,3]$: f décroît sur $[0,2]$ de $f(0) = 1$ à $f(2) = -3$, puis croît sur $[2,3]$ jusqu'à $f(3) = -2$. Toutes les valeurs entre -3 et 1 sont atteintes (fonction continue), et aucune autre.

$f([0,3]) = [-3,1]$.

Image réciproque de $\{1\}$: on cherche tous les x tels que $f(x) = 1$, soit $x^2 - 4x = 0$, $x(x-4) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 4$.

> **Réponse.** $f([0,3]) = [-3,1]$ et $f^{-1}(\{1\}) = \{0,4\}$.

2. Injective ? Non : deux réels différents ont la même image, $f(0) = f(4) = 1$.

Surjective ? Non : d'après la forme canonique, $f(x) \geqslant -3$ pour tout x, donc un réel comme -4 n'a aucun antécédent.

> **Réponse.** f n'est ni injective ni surjective.

3. f est strictement croissante sur $[2,+\infty[$ (à droite du sommet de la parabole) et c'est le plus grand intervalle contenant 5 sur lequel elle est strictement monotone. On prend $I = [2,+\infty[$.

Sur I, f prend exactement les valeurs de $f(2) = -3$ à $+\infty$: $J = [-3,+\infty[$.

Bijectivité et réciproque : soit $y \in J$ et $x \in I$. On garde la racine positive car $x - 2 \geqslant 0$:

$$y = (x-2)^2 - 3 \iff (x-2)^2 = y + 3 \iff x - 2 = \sqrt{y+3} \iff x = 2 + \sqrt{y+3}.$$

Chaque $y \geqslant -3$ a donc un unique antécédent dans I : g est bijective.

> **Réponse.** $I = [2,+\infty[$, $J = [-3,+\infty[$ et $g^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y+3}$.